Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift ändrades i början av 2018 från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Tisdagen den 8 januari 2019 klockan 14.00-17.00 i Samhällsbyggnad.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

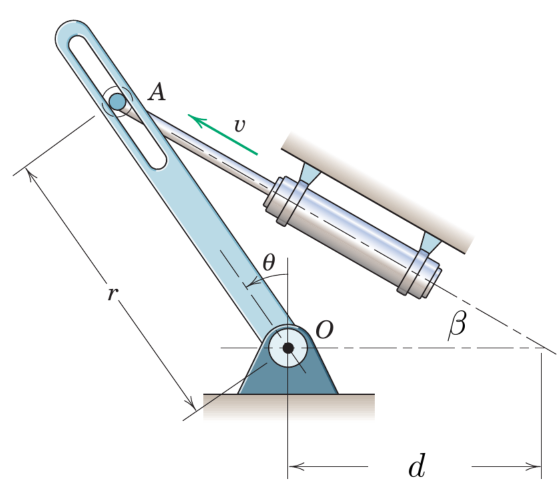
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 31 januari, kl 12.30-13.00 i FL61.

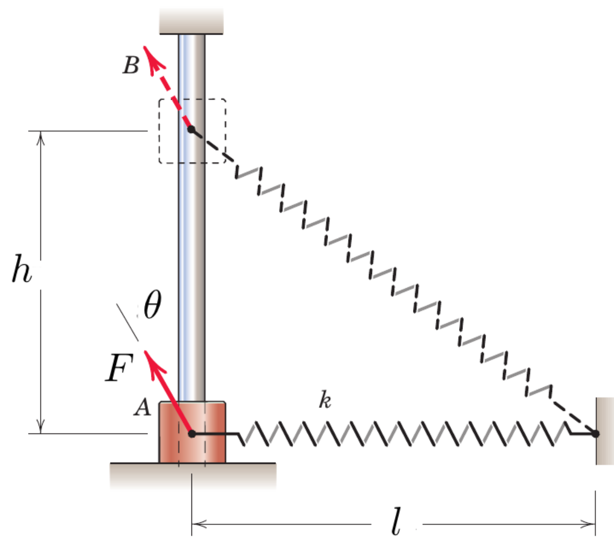
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

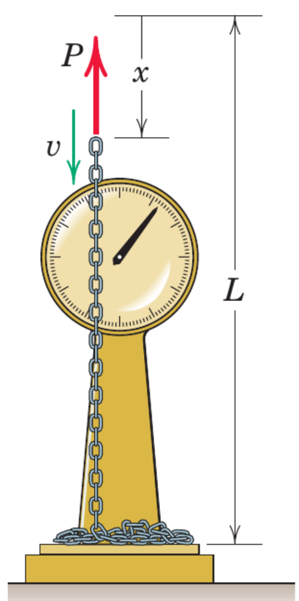
1. Den hydrauliska kolven ger punkten A en konstant fart v vilket får armaturen att rotera. Beräkna $\dot{r}$, $\ddot{r}$ och $\ddot{\theta}$ som funktioner av θ.



2. En ring med massan m rör sig friktionsfritt på stången som står i det vertikala planet. Fjädern har jämviktslängd l_0. En konstant kraft verkar på ringen enligt figuren. Beräkna hastigheten för ringen när den når det övre läget B, om den släpps i vila från det nedre läget A.

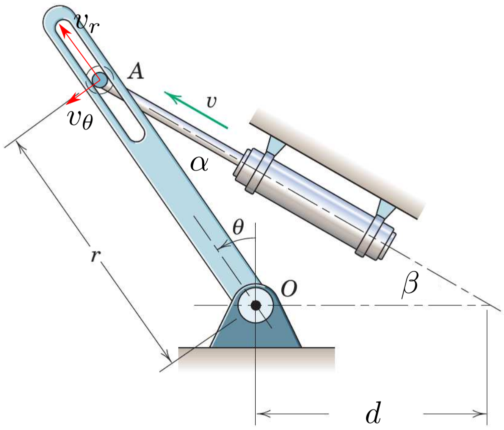


3. En kedja med längd L och massa ρ per längdenhet släpps ned på en våg med den konstanta farten v. Beräkna kraften R som vågen visar som funktion av x. (Kraften P i figuren är den kraft som behöver appliceras för att kedjan ska hålla konstant fart. Kraften P behöver ni inte räkna ut.)



Lycka till!

Uppgift 1



Figur 1.

Innan vi börjar med själva lösningen så

Hastighetsvektorn i polära koordinater ges av

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

Låt detta vara hastighetsvektorn för punkten A.

Det betyder att vi kan hitta $\dot{r}$ och $\dot{\theta}$ genom att projicera hastighetsvektorn i figuren i r- och θ-led. För att kunna lösa för $\dot{\theta}$ behöver vi veta r. Låt oss därför först hitta ett uttryck för r.

Inför vinkeln α som i figuren. Den ges av

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - \beta - \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \beta - \theta. \end{aligned}$$

Vi känner två vinklar och en sida av triangeln i uppställningen så vi kan lösa för alla sidor.

Sinussatsen kan användas för att lösa för r,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)}{d} &= \frac{\sin(\beta)}{r} \\ &\Leftrightarrow \\ r &= d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \end{aligned}$$

Nu kan vi projicera $\boldsymbol{v}$ i figuren på de vinkelräta vektorerna $\boldsymbol{e}_r$ och $\boldsymbol{e}_\theta$ och lösa för $\dot{r}$ och $\dot{\theta}$:

$$\boldsymbol{v} = v\cos(\alpha)\boldsymbol{e}_r + v\sin(\alpha)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v\cos(\alpha) \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{r}\sin(\alpha) \\ &= \frac{v\sin(\alpha)}{d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}} \\ &= \frac{v}{d}\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)} \end{aligned}$$

För att hitta andraderivatorna av r och θ använder vi   att eftersom stången ha konstant hastighet så är accelerationsvektorn för punkten A är en nollvektor. I polära koordinater ges den av

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Att accelerationsvektorn är en nollvektor betyder att båda komponenterna är noll. Det ger oss en möjlighet att direkt lösa för $\ddot{r}$ och $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\
&= -2\frac{v^2}{d^2}\cos(\alpha)\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)}\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\
&= -2\frac{v^2}{d^2}\frac{\cos(\alpha)\sin^3(\alpha)}{\sin^2(\beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 \\
&= d\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cdot \left(\frac{v}{d}\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(\beta)}\right)^2 \\
&= \frac{v^2}{d}\frac{\sin^3(\alpha)}{\sin(\beta)}
\end{aligned}$$

Vi kan nu slutligen substituera $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \theta$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v\sin(\beta + \theta) \\
\ddot{r} &= \frac{v^2}{d}\frac{\cos^3(\beta + \theta)}{\sin(\beta)} \\
\ddot{\theta} &= -2\frac{v^2}{d^2}\frac{\sin(\beta + \theta)\cos^3(\beta + \theta)}{\sin^2(\beta)}
\end{aligned}$$

Uppgift 2

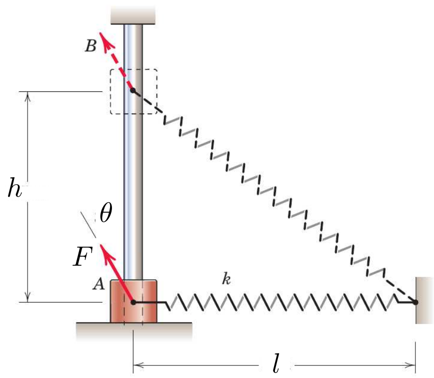


Figure 1.

Vi kan direkt skriva ned den potentiella energin i läge A och läge B. Kraften F kommer att utföra ett arbete som beräknas genom att projicera kraften på rörelseriktningen. Tillsammans får man

$$\begin{aligned} V_s^A &= \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \\ V_s^B &= \frac{1}{2}k\big(\sqrt{l^2+h^2}-l_0\big)^2 \\ V_g^B &= mgh \\ U_F &= F\cos(\theta)h \end{aligned}$$

Energi-arbete relationen ger oss nu

$$\begin{aligned} T_A+V_A+U &= T_B+V_B \\ &\Leftrightarrow \\ V_s^A+U_F &= T_B+V_s^B+V_g^B \end{aligned}$$

Den kinetiska energin vid B ges av $T_B=\frac{mv_B^2}{2}$, insättning av de övriga potentiella energierna ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k(l-l_0)^2+F\cos(\theta)h &= \frac{mv_B^2}{2}+\frac{1}{2}k\big(\sqrt{l^2+h^2}-l_0\big)^2+mgh \\ &\Leftrightarrow \\ v_B &= \sqrt{\frac{k}{m}\big(-h^2-2l_0l+2\sqrt{l^2+h^2}l_0\big)+2\frac{F}{m}\cos(\theta)h-2gh} \end{aligned}$$

Uppgift 3

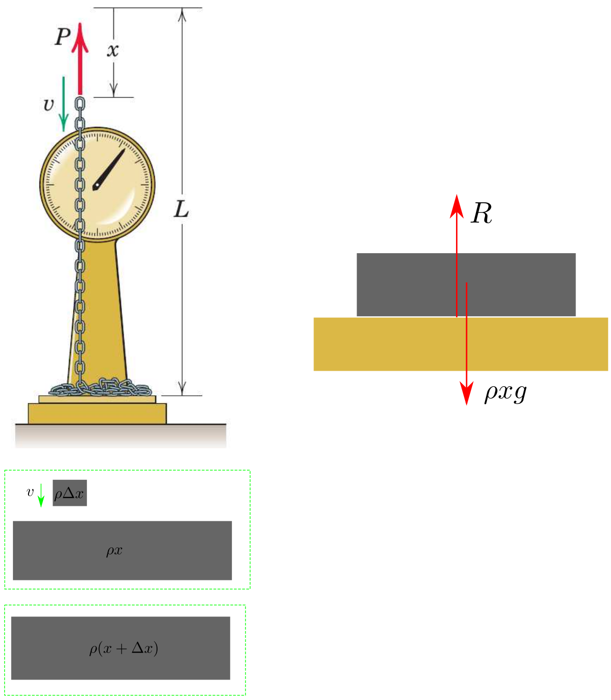


Figure 1.

Vi tittar på systemet bestående av kedjan som ligger på vågen tillsammans med en liten bit som är på väg ned. Rörelsemängden vid x och $x+\Delta x$ ges av (med positiv riktning uppåt)

$$\begin{aligned} G(x) &= -\rho\Delta x v \\ G(x+\Delta x) &= 0. \end{aligned}$$

De externa krafterna är dels tyngdkraften på kedjan som ligger på vågen och den sökta normalkraften R.

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{\Delta G}{\Delta t} \\ &\Leftrightarrow \\ -x\rho g + R &= \frac{\rho\Delta x v}{\Delta t} \\ &\Leftrightarrow \\ R &= \rho v^2 + x\rho g \end{aligned}$$